

Ein Vorschlag zum Umgang mit Daten und Modellen im Mathematikunterricht am Beispiel von Fallzahlen von SARS-CoV-2

LUKAS DONNER, ESSEN; SEBASTIAN BAUER, GÖTTINGEN

Das Zusammenspiel von Daten und Modellen wird im Mathematikunterricht vornehmlich nicht fachlich authentisch behandelt. Oftmals werden reale Kontexte (und vermeintlich gemessene Wertepaare) dafür genutzt, um fehlende Parameter einer Modellfunktion eindeutig durch Einsetzen der Messwerte in die Funktionsgleichung und das anschließende Lösen eines eindeutig bestimmbar Gleichungssystems zu erhalten. Dieser Zugang verschleiert, dass im Allgemeinen gemessene Daten fehlerbehaftet sind und nach Möglichkeit mehr Daten gemessen werden, als zur Bestimmung der Parameter nötig sind. Dieser Problematik wollen wir uns zunächst durch drei Kontexte vergegenwärtigen, nämlich der Auseinandersetzung mit Fallzahlen von SARS-CoV-2, einer Schulbuchaufgabe zum exponentiellen Zerfall sowie einer historischen Problemstellung der Astronomie. Anschließend unterbreiten wir einen Vorschlag zur authentischen Auseinandersetzung mit der Beziehung zwischen Daten, Modellen und Messfehlern durch Einbeziehung von Fehlerfunktionalen wiederum im Kontext von Fallzahlen der SARS-CoV-2-Epidemie.

1. Einleitung und Problemerkfassung

In diesem Beitrag möchten wir einen Blick auf den typischen Schulzugang zu Daten und Modellen werfen. Diesem Zusammenhang wird selten fachlich authentisch begegnet: In der Regel sind genau so viele Datenpunkte gegeben, um mittels eindeutig lösbar Gleichungssystems die Parameter einer Funktion bestimmen zu können. Gleichzeitig wird davon ausgegangen, dass alle Messwerte exakt wären. Anlass um über diesen auf Realsituationen bezogenen inadäquaten Zugang nachzudenken und Alternativen zu entwickeln bietet der Umgang mit Fallzahlen von SARS-CoV-2 zu Beginn des Jahres 2021, als sich eine neue Virusvariante in Deutschland (und Österreich) ausbreitete.

1.1 Auszug aus einem Unterrichtsentwurf: Ausbreitung einer neuen Virusvariante

Im Folgenden wird ein Ausschnitt eines Unterrichtsentwurfs zum Thema Covid-19 skizziert, der auf Bauer, Doktor und Donner (2022) zurückgeht. Im Herbst bzw. Winter 2020 erfolgte in Deutschland und Österreich eine massive Infektionswelle, weshalb Ende 2020 ein (Teil-)lockdown verhängt wurde. Daraufhin stagnierten in Deutschland die Fallzahlen bzw. ebten im Jänner und Februar 2021 sogar ab, wie in Abbildung 1a dargestellt.

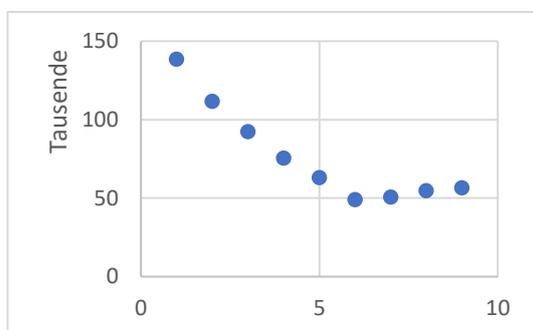


Abb. 1a: Fallzahlen in den ersten Kalenderwochen 2021.

KW	Fallzahlen	Anteil α -Variante
01	138516	2,5%
02	111785	2,0%
03	92457	3,6%
04	75585	4,7%
05	63209	7,2%
06	49018	17,6%
07	50691	25,9%
08	54716	40,0%
09	56518	54,4%

Tab. 1b: Fallzahlen und Anteil der α -Variante in den ersten Kalenderwochen 2021.

Den Ausgangspunkt für die Lernumgebung bildet nun das folgende Paradoxon: *Mitten in dieser Phase stagnierender und zurückgehender Zahl an Neuinfektionen warnt das Robert-Koch Institut (RKI) Mitte März 2021 vor exponentiell steigenden Fallzahlen.* Diese Warnung ist durch den schnellen Anstieg des Anteils der α -Variante an den Fallzahlen begründet (siehe Tabelle 1b). Die gleichzeitige Abnahme der Fallzahlen, welche auf andere Virusvarianten (und insbesondere der ursprünglichen Virusvariante, des sogenannten Wildtyps) zurückgehen, verbergen die Tatsache, dass sich die neue Virusvariante schnell ausbreitet. Der Annahme eines exponentiellen Zusammenhangs $f(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$ folgend lösen die Schüler*innen im ersten Zugang – ihrem Erfahrungsschatz entsprechend – ein Gleichungssystem basierend auf zwei der neun Datenpunkte, um Werte für die Parameter c und k zu bestimmen. Verschiedene Datenpaare sind dafür von den Autor*innen vorab ausgewählt worden, sodass die Lösungen der Schüler*innen sehr weit streuen, wie Abbildung 2 zeigt.

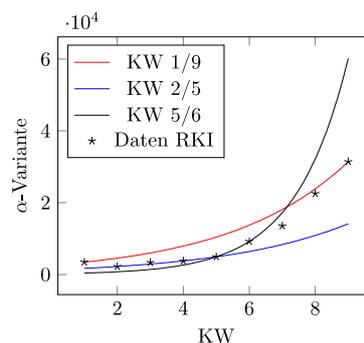


Abb. 2: Graphen der Funktionen zur Frage nach den Parametern des exponentiellen Wachstums der α -Variante.

Bevor wir uns in Kapitel 2 damit auseinandersetzen, wie man mit dieser Situation nun umgeht, wenden wir uns zunächst einer typischen Schulbuchaufgabe zu.

1.2 Eine typische Schulbuchaufgabe zum exponentiellen Zerfall

Eine typische Schulbuchaufgabe, bei der das eben dargestellte Problem vorkommt, ist in Abbildung 3 dargestellt.

Aufgaben	Grundkompetenzen																
<p>4.75 Die Höhe des Bierschaums in einem Glas wurde alle 20s gemessen.</p> <p>1) Zeichne die zur Tabelle gehörigen Punkte in ein Diagramm ein!</p> <p>2) Begründe, warum man von einer näherungsweise exponentiellen Abnahme der Schaumhöhe sprechen kann und gib eine passende Termdarstellung der Funktion $h: t \mapsto h(t)$ an!</p> <p>3) Was bedeuten die Zahlen in dieser Termdarstellung?</p> <p>4) Man spricht von „sehr guter Bierschaumhaltbarkeit“, wenn die Halbwertszeit des Schaumzerfalls mehr als 2min beträgt. Liegt im vorliegenden Fall sehr gute Bierschaumhaltbarkeit vor?</p>	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>Zeit t (in s)</td> <td>0</td> <td>20</td> <td>40</td> <td>60</td> <td>80</td> <td>100</td> <td>120</td> </tr> <tr> <td>Höhe (in mm)</td> <td>30</td> <td>26</td> <td>23</td> <td>19</td> <td>17</td> <td>15</td> <td>13</td> </tr> </tbody> </table>	Zeit t (in s)	0	20	40	60	80	100	120	Höhe (in mm)	30	26	23	19	17	15	13
Zeit t (in s)	0	20	40	60	80	100	120										
Höhe (in mm)	30	26	23	19	17	15	13										

Abb. 3: Eine typische Schulbuchaufgabe zum exponentiellen Zerfall (Malle et al. 2010, S.69).

Wir wollen Aufgabenteile 2) und 4) dieser Grundkompetenzaufgabe lösen und wenden uns zunächst 2) zu. Gesucht ist eine passende Termdarstellung einer exponentiellen Abnahme. Naheliegender Zugang ist es, zwei der Datenpunkte heranzuziehen, um die Parameter der Funktion h eindeutig zu bestimmen. Wir beschriften die sieben gegebenen Punkte mit A(0|30) bis G(120|13). Im Unterricht wird dafür üblicherweise auf die Punkte A und B oder A und G zurückgegriffen. Doch auch andere Kombinationen

sind denkbar. Mögliche Graphen sind in Abbildung 3 dargestellt, wobei die Punkte A und B auf h_1 liegen, die Punkte C und D auf h_2 bzw. D und E auf h_3 . Jede der drei Funktionen bietet eine „passende Termdarstellung“, die Bestimmung ebendieser überlassen wir dem bierschauminteressierten Lesenden.

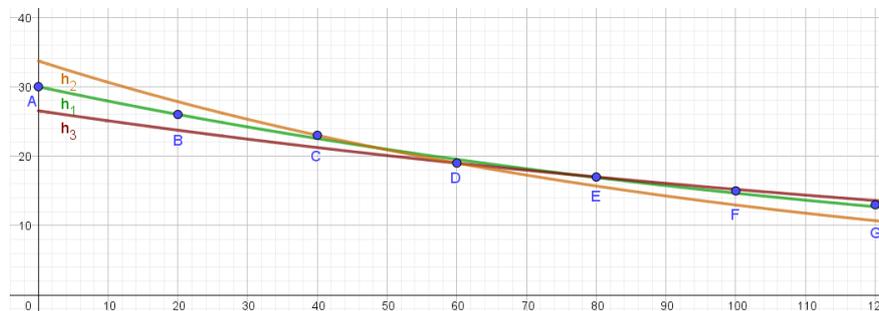


Abb. 4: Graphen möglicher Funktionen für Aufgabenteil 2) von Schulbuchaufgabe aus Abb. 3.

Oftmals dienen derartige Aufgabenstellungen in erster Linie zur Übung des Aufstellens und Lösens von Gleichungssystemen; der verwendete Datensatz erfüllt dabei in aller Regel den Zweck einer abwechslungsreichen Einkleidung. Problematisch wird es allerdings, wenn wir in Aufgabenteil 4) nach einer qualitativen Bewertung gefragt werden. Ein typischer Zugang in der Schule ist es, das Verhältnis zwischen der Höhe nach 120 Sekunden und der ursprünglichen Höhe zu berechnen um festzustellen, ob die Halbwertszeit mehr als 2 Minuten beträgt. Da $13/30 < 0,5$ ist, läge somit keine sehr gute Bierschaumqualität vor. Doch implizit würden wir durch diesen Rechenweg im Gegensatz zum Aufgabenteil 2) annehmen, dass die beiden Punkte A und G die definierenden Punkte unserer Bierschaumfunktion wären. Berechnen wir im Gegenzug die Halbwertszeit für jede der drei Funktionen h_1 , h_2 bzw. h_3 , so kämen wir auf 1,6 min, 1,25 min bzw. 2,07 min. Wir können also nicht seriös entscheiden, ob es sich bei den gegebenen Werten um eine sehr gute Bierschaumqualität handelt, weil wir basierend auf den zur Verfügung stehenden Daten mit dem üblichen Verfahren der Bestimmung von Funktionen zu widersprüchlichen Bewertungen kommen.

1.3 Ein historischer Exkurs

Die Schwierigkeiten in beiden vorangestellten Aufgaben sind dieselben: Es liegen mehr Daten vor, als zur eindeutigen Bestimmung von Parametern eines bekannten Modells - in unseren Fällen einer vorab bekannten Funktionenklasse - benötigt wird. Außerdem sind gemessene Daten in der Regel fehlerbehaftet, ein Umstand, dem wir durch die Passung an bestimmte Datenpunkte keineswegs Rechnung tragen. Diese Problematik des Umgangs mit Daten und Modellen ist natürlich seit langem bekannt und nicht nur auf den Schulkontext beschränkt, wie folgendes Zitat zeigt:

„Wenn die astronomischen Beobachtungen und die übrigen Zahlen, auf welche die Bahnberechnung sich stützt, einer absoluten Genauigkeit sich erfreuten, so würden auch Elemente, mag man sie nun aus drei oder vier Beobachtungen herleiten, sogleich absolut genau herauskommen [...] Da aber alle unsere Messungen und Beobachtungen nichts als Annäherungen an die Wahrheit sind, und dasselbe von allen darauf gestützten Rechnungen gelten muss, so muss das höchste Ziel aller über concrete Erscheinungen darin gefunden werden, der Wahrheit so nahe als möglich zu kommen. Dies kann aber in keiner anderen Weise geschehen, als durch eine geeignete Combination von *mehr* Beobachtungen, als absolut zur Bestimmung der unbekannt GröÙe erforderlich sind. Diese Arbeit lässt sich jedoch erst dann unternehmen, wenn man bereits eine angenäherte Kenntnis der Bahn besitzt, welche dann so zu verbessern ist, dass sie allen Beobachtungen *so nahe wie möglich* entspricht.“

kommentierte einst Carl Friedrich Gauß (1865, S.250) den Zusammenhang zwischen Messungen und Berechnungen von Planetenbahnen. Anlass für diese Überlegungen war der folgende Sachverhalt: Am

Neujahrsabend 1801 entdeckte der Astronom Giuseppe Piazzi einen neuen (Zwerg-)planeten, den er Ceres nannte; allerdings konnte er ihn nicht durchgehend beobachten und so ging er wieder verloren (Wikipedia, 2022). Carl Friedrich Gauß, entwickelte eine Methode mit deren Hilfe Ceres am 7. Dezember 1801 wieder entdeckt werden konnte: die sogenannte *Methode der kleinsten Quadrate*.

Die Idee hinter dieser Methode ist die folgende: geht man von einem festen (begründbaren) mathematischen Modell aus, enthält dieses in der Regel Parameter, deren Werte anhand vorhandener Daten geschätzt werden müssen. Liegen mehr Daten vor als nötig kommt es in der Regel zu Abweichungen. Bei jeder Parameterwahl kommt es zu Differenzen zwischen beobachteten Werten O_i (observed values) und mittels Parametern berechneten Modelldaten C_i (computed values). Unter der Annahme, dass die Fehler durch die Beobachtung rein zufällig um 0 schwanken - d.h. der Durchschnitt ist 0, die Varianz ist konstant und die Messfehler sind unabhängig voneinander - erhält man ein Maß für den Fehler als

$$QF = \sum_{i=1}^n (O_i - C_i)^2,$$

und die Minimierung von QF führt zu einer möglichen Schätzung von Parametern. Nach dem Satz von Gauß-Markov liefert das Minimieren von QF sogar optimale Schätzer, im Sinne minimaler Varianz, in der Klasse der linearen Fehlerschätzer (wobei es sich beim Problem der Anpassung an eine Ellipse wohlgerneht nicht um ein lineares Problem handelt).

1.4 Zusammenfassung

Allen geschilderten Problemen gemein ist, dass wir eine Vorstellung eines Funktionsmodells haben, jedoch die Parametrisierung erst vornehmen müssen, oder in Worten von Gauß (1809, S.250): „Diese Arbeit lässt sich jedoch erst dann unternehmen, wenn man bereits eine angenäherte Kenntnis der Bahn besitzt.“ Dafür müssen wir uns jedoch von der Idee lösen, einzelne Datenpunkte durch unsere Funktionsvorschrift genau zu treffen, da Messungen (Fallzahlen, Höhe des Bierschaums, Planetenpositionen) prinzipiell fehlerbehaftet sind, also das Verfahren ändern. Im Gegenzug erhalten wir durch Schätzung der Parameter eine Passung an alle Datenpunkte, „welche dann so zu verbessern ist, dass sie allen Beobachtungen so nahe wie möglich entspricht“ (ebd.). Die Schätzung kann zum Beispiel durch die Minimierung des quadratischen Fehlers vorgenommen werden. Aufgrund des folgenden zugrunde liegenden Bildes spricht man dabei in der Regel vom *Parameter schätzen* anstatt vom Parameter bestimmen: In einer idealen Welt existieren die richtigen Parameterwerte. Bei der Durchführung der Messungen entstehen aber unvermeidlich Messfehler. Wir können also gar nicht die „richtigen“ Messwert messen, sondern immer nur fehlerbehaftete. Aus den fehlerbehafteten Daten können die „richtigen“ Parameterwerte also prinzipiell nicht bestimmt werden, wir können nur eine Schätzung vornehmen, wo die richtigen Parameter ungefähr liegen müssen. Der typische Schulzugang der perfekten Passung von Messdaten mit mathematischen Modellen und das Bestimmen der Parameter mithilfe eines eindeutig lösbar Gleichungssystems durch Einsetzen der gegebenen Punkte in eine Modellfunktion verzerrt demnach den allgemeinen Fall des Zusammenspiels von Daten und Modellen, bei dem Messfehler und Überbestimmtheit durch viele Messwerte die Regel darstellen.

2. Thematisierung des „Parameterschätzens“ im Unterricht

Dieses Kapitel startet mit einem rein beispielhaften (und keinesfalls universellen) Blick in gängige, aktuelle deutsche Schulbücher, um der Frage nachzugehen, wie mit dem in Kapitel 1 aufgeworfenem Phänomen in der Praxis umgegangen wird. Im Anschluss widmen wir uns für den Rest des Kapitels dem bereits erwähnten Unterrichtsversuch aus Bauer, Doktor und Donner (2022), um Möglichkeiten zum fachlich authentischen Umgang mit Daten und Modellen im Mathematikunterricht am Beispiel von Fallzahlen von SARS-CoV-2 aufzuzeigen.

2.1 Ein exemplarischer Blick in aktuelle Schulbücher

Erörterungen zum Zusammenspiel zwischen Messungen und Modellen werden in der Sekundarstufe 1 in den sogenannten „Exkurs“ der Schulbücher ausgelagert, also nicht von allen Schüler*innen verpflichtend thematisiert. In der 7. Schulstufe, wird, wie in Abbildung 5 dargestellt, am Beispiel eines tropfenden Wasserhahns eine graphische Herangehensweise an Messungen eines linearen Zusammenhangs angeregt, aus der dann die Termdarstellung rekonstruiert werden kann – also eine Anpassung nach Augenmaß.

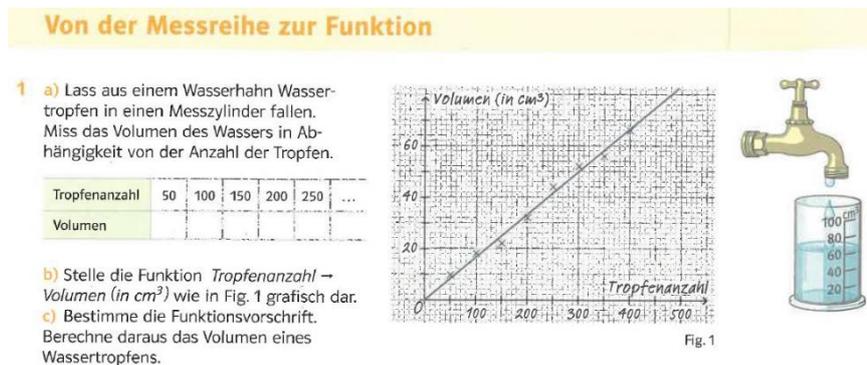


Abb. 5: Beispiel einer Anpassung nach Augenmaß (Baum et al. 2014a, S.137).

In der 8. Schulstufe wird am Beispiel des funktionalen Zusammenhangs zwischen Geschwindigkeit und Verbrauch die adäquate Wahl des Funktionsmodells, also der Ausgleichskurven, thematisiert (siehe Abb. 6). Unter dem Graph wird im roten Feld angedeutet, dass zur Bestimmung einer Ausgleichskurve eine „lineare Regression“ bzw. „quadratische Regression“ durchgeführt wird. Ersteres ist nichts anderes als die Bestimmung des kleinsten Fehlerquadrats unter der Annahme eines linearen Zusammenhangs. Begleitet wird die Grafik unter anderem mit folgendem Text: „Mithilfe einer Tabellenkalkulation kann man sich die Ausgleichskurve sowie die Funktionsgleichung dieser Kurve anzeigen lassen“ (Lambacher-Schweizer, S. 188).

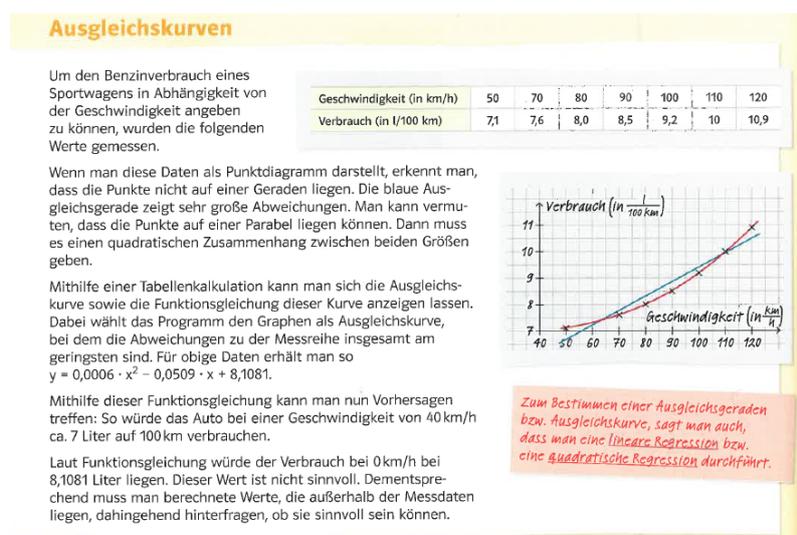


Abb. 6: Ausgleichskurven bei quadratischem Zusammenhang (Baum et al., 2014b, S.188).

Die Bestimmung der optimalen Parameter wird dann in weiterer Folge an das Tabellenkalkulationstool Excel ausgelagert. Dabei wird beschrieben, dass der Befehl „Trendlinie hinzufügen“ unter der geeigneten Wahl des funktionalen Zusammenhangs eine optimale Funktionsvorschrift angibt (ebd). Die Behandlung des Beispiels zum Benzinverbrauch im Schulbuch suggeriert den Schüler*innen, man könne Probleme dieser Art, also der Passung von gemessenen Daten und Parametrisierung von Funktionen, einfach auf Knopfdruck lösen. Dies ist natürlich richtig, doch dabei wird kein Verständnis dafür geschaffen, was dabei mathematisch „passiert“.

Aber auch in der Sekundarstufe II findet zumindest im Grundkurs diesbezüglich nur eine oberflächliche Klärung statt, wie folgender Schulbuchauszug (Abb. 7) zeigt.

INFO → Aufgaben 7 bis 10

U Spannung in Volt	I Stromstärke in mA
1,1	3,1
2,1	6,6
2,9	9,7
4,2	12,8
4,9	16,1

Messwerte für Spannung und Stromstärke an einem Widerstand

$$s(m) = \sum (u_i - m \cdot i)^2$$

$$f\text{Min}(s(m), m)$$

$$m = 3,19774$$

Fig. 2

k (Messwert-Nummer)	1	2	3	4	5
x_k	1,1	2,1	2,9	4,2	4,9
y_k	3,1	6,6	9,7	12,8	16,1
$m \cdot x_k - y_k$	$1,1m - 3,1$	$2,1m - 6,6$	$2,9m - 9,7$	$4,2m - 12,8$	$4,9m - 16,1$

Das Prinzip der Regression wird an einem Beispiel erläutert. Bei den Messdaten in der Tabelle vermutet man, dass Spannung und Stromstärke proportional sind. Ziel ist, rechnerisch eine möglichst gut passende Ursprungsgerade durch die Messpunkte zu finden. Man nummeriert zunächst die Messpunkte und berechnet, wie stark ihre y-Werte von denen einer Ursprungsgeraden $y = m \cdot x$ abweichen. Dabei ist m variabel:

Fig. 1

Da es positive und negative Abweichungen geben kann (Fig. 1), verwendet man nach einer Idee von Gauß die Quadrate der Abweichungen und bildet ihre Summe:

$$S(m) = (1,1m - 3,1)^2 + (2,1m - 6,6)^2 + (2,9m - 9,7)^2 + (4,2m - 12,8)^2 + (4,9m - 16,1)^2$$

Durch diese Gleichung wird eine quadratische Funktion definiert, deren Minimum einen optimalen Wert für m liefert (Fig. 2).

Fig. 3 zeigt, wie gut die berechnete Gerade ($y = 3,20x$) die Messpunkte annähert.

Das CAS berücksichtigt bei einer linearen Regression, dass neben der Steigung auch der y-Achsenabschnitt variabel ist und erhält daher die Gerade $y = 3,30x - 0,36$.

Fig. 3

Abb. 7: Ausgleichskurven bei quadratischem Zusammenhang (Baum et al., 2016, S.236).

An dieser Stelle findet, bis auf ein paar begleitende Aufgabenstellungen, die einzige Auseinandersetzung der Lernenden mit Modellierungen von Daten mithilfe von Fehlerrechnung in der Oberstufe statt. Wie in Abb. 7 zu sehen ist, erfahren Schüler*innen anhand eines Beispiels, wie sie mittels CAS die Minimierung des quadratischen Fehlers im linearen Modell berechnen können. Dabei wird im Schulbuch vom „optimalen Wert“ gesprochen als Synonym für die Minimierung des speziellen Fehlerkalküls (und nicht im Sinne eines optimalen Verfahrens, den Parameterwert auf diese Weise zu schätzen). Bei der Frage, wie dieses Verfahren für nicht-homogene lineare Funktionen aussieht wird auf das CAS verwiesen. Auf die Tatsache, dass Regression und Minimierung des quadratischen Fehlers mitunter nicht dasselbe sind (siehe insb. Abschnitt 2.5.bis 2.7. in diesem Artikel), wird im Schulbuch nicht eingegangen, auch wenn anschließende Aufgabenstellungen zur Funktionsanpassung nicht mehr ausschließlich auf linearen funktionalen Zusammenhängen beruhen. Als allgemeinen Hinweis zum Vorgehen beim Modellieren einer Datenmenge erhalten die Schüler*innen, nach der Festlegung auf einen Wachstumstyp unter Zuhilfenahme einer graphischen Darstellung der Daten, „mit passenden Punkten oder durch Regression eine Modellfunktion [zu] bestimmen“ (Baum et al., 2016, S.234) und danach das „Ergebnis [zu] beurteilen, ggf. Wachstumstyp bzw. Datenpunkte [zu] ändern“ (ebd.). Auf welcher Grundlage man Datenpunkte ändern sollte, und ob das überhaupt allgemein redlich ist, wird nicht geklärt. Im Vergleich mit früheren Schulbüchern zeigt sich, dass die reine Reduzierung auf eine überspitzt formulierte „Knopfdruckarithmetik“ anhand weniger Beispiele eine neue Entwicklung ist und es vor einigen Jahren noch durchaus üblich war, die Optimalität der linearen Regression im allgemeinen linearen Fall zu begründen, zwischen linearer und exponentieller Regression zu unterscheiden und in diesem Zusammenhang über

die Schätzung von Parametern anstatt der Bestimmung von Parametern zu sprechen (e.g. Baum et. al., 2000, S.62 ff.; Jahnke et. al., 2006, S.321ff.).

Sowohl der schleichenden Reduzierung auf „Mathematik per Knopfdruck“ sowie der vermeintlichen Aufforderung, bei Ungereimtheiten Datenpunkte nach Belieben „zu ändern“ wollen wir in weiterer Folge entgegenwirken – und dabei Daten fachlich authentisch begegnen.

2.2. Zurück zum Unterrichtsentwurf

Für den Rest von Kapitel 2 stellen wir anhand der Problemstellung aus dem bereits erwähnten Unterrichtsversuch Bauer, Doktor und Donner (2022) dar, wie das Schätzen von Parametern aus gegebenen Daten unterrichtlich inszeniert werden könnte. Den Startpunkt bilden die aus Tabelle 1b ableitbaren Fallzahlen der α -Variante in den ersten Kalenderwochen des Jahres 2021 in Deutschland, die in Tab. 2 noch einmal explizit aufgeführt und in Abb. 8 graphisch dargestellt werden. Bei diskutierten Lernendenlösungen beziehen wir uns im Folgenden auf zwei Unterrichtsversuche die in der zweiten Jahreshälfte 2021 an zwei Leistungskursen der Stufe 12 in zwei Gymnasien in Nordrhein-Westfalen durchgeführt wurden.

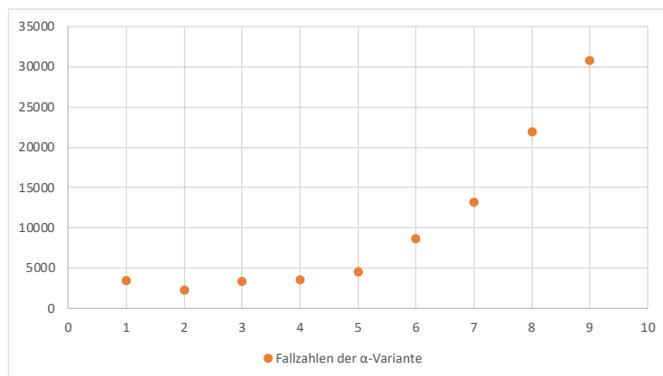


Abb. 8: Die Fallzahlen der Alpha-Variante in den ersten Kalenderwochen des Jahres 2021

KW	Fallzahlen α -Variante
01	3463
02	2236
03	3328
04	3552
05	4551
06	8627
07	13129
08	21886
09	30746

Tab. 2: Fallzahlen der Alpha-Variante in den Kalenderwochen 1 bis 9 des Jahres 2021 in Deutschland

Als festes Modell nehmen wir einen exponentiellen Zusammenhang für die Fallzahlen an, $f(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$.

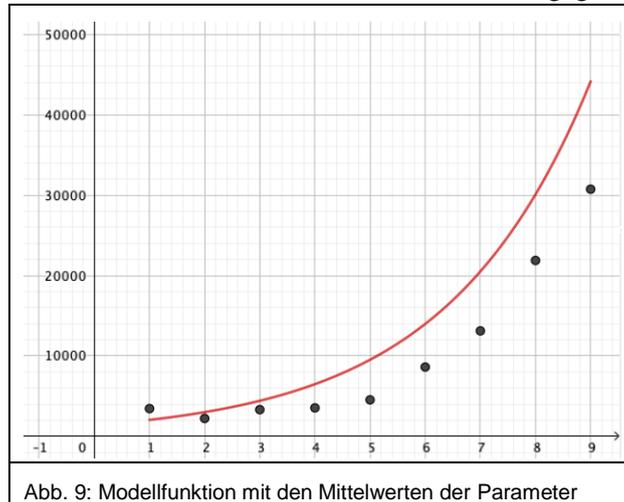
2.3 Bildung von Mittelwerten

Das übliche Verfahren – aus zwei Messwerten zwei Parameter eindeutig zu bestimmen – führt auf recht unterschiedliche Parameterwerte und entsprechend unterschiedliche Modellfunktionen, siehe Abb. 2 und Tab. 3.

Tab.3: aus zwei Datenpunkten bestimmte Parameter		
KWen	c	k
01 und 09	2635.7	0.2730
02 und 05	1391.9	0.2369
05 und 06	185.9	0.6396

Nach unseren Erfahrungen reagieren die Lernenden auf diese Problemlage mit zwei Vorschlägen: Man könnte Mittelwerte der Parameter bilden oder man könnte Mittelwerte der aus den einzelnen Parametern gebildeten Modellfunktionen bilden. Lernpsychologisch ist das nachvollziehbar, es wird versucht das Problem mit den bekannten Werkzeugen anzugehen.

Basierend auf den drei Messwertpaaren aus Abb. 2 – KW 1 und 9, KW 2 und 5 sowie KW 5 und 6 – ergeben sich zunächst die Parameterpaare in Tab. 2. Bildet man nun die Mittelwerte der Parameter, erhält man den Parametersatz $c_M = 1404.5$ und $k_M = 0,3831$. Die entsprechende Modellfunktion $f(t) = c_M \cdot e^{k_M \cdot t}$ ist zusammen mit den Messwerten in Abb. 9 wiedergegeben.

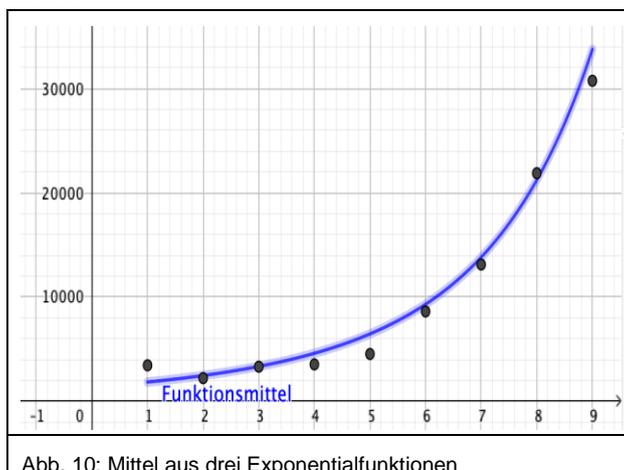


Auch dieses Ergebnis ist augenscheinlich nicht zufriedenstellend. Nun könnte man zu allen möglichen Zweierkombinationen der Kalenderwochen die zugehörigen Parameter berechnen und dann die beiden Mittelwerte über alle Kalenderwochenkombinationen berechnen, das wirkte aber auf die Lernenden sehr aufwändig.

Nach der zweiten Methode – Mittelwert der Modellfunktionen – erhält man die Summe von drei Exponentialfunktionen mit unterschiedlichen Exponenten:

$$f(t) = \frac{1}{3} \cdot (2653.7 \cdot e^{0.2730 \cdot t} + 1391.9 \cdot e^{0.2369 \cdot t} + 185.9 \cdot e^{0.6396 \cdot t}).$$

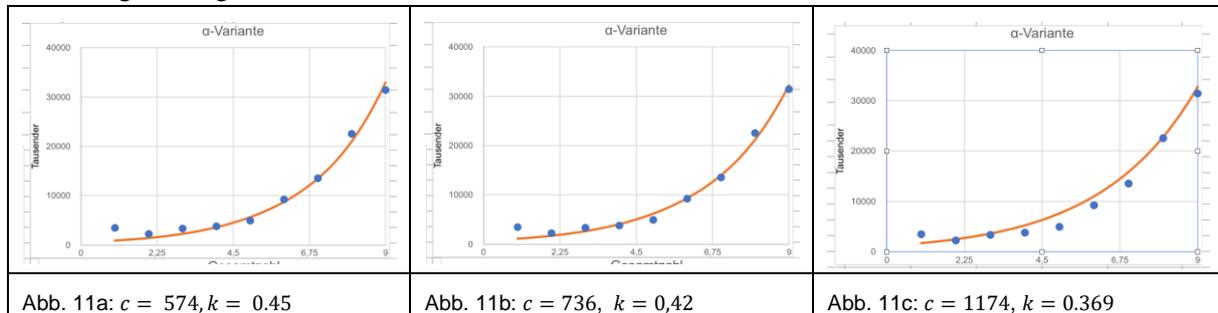
Die Passung zu den Messwerten erscheint augenscheinlich deutlich besser, siehe Abb. 10. Dies ist aber erkauft mit einer deutlich komplexeren Modellfunktion, die immer komplexer würde, je mehr Messwerte mit berücksichtigt würden.



Aus diesen beiden Betrachtungen kann die Fragestellungen motiviert werden, eine gute augenscheinliche Passung mit nur *einer* Exponentialfunktion zu erreichen, die alle neun Messwertpaare berücksichtigt.

2.4 Händische Anpassung nach Augenmaß

Eine händische Anpassung kann mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms mit Schieberegulern per Augenmaß vorgenommen werden. Nach unseren Erfahrungen erzielen die Lernenden dabei augenscheinlich gute Anpassungen, die sich nur geringfügig unterscheiden, drei Lernendelösungen sind in Abbildung 11 dargestellt.

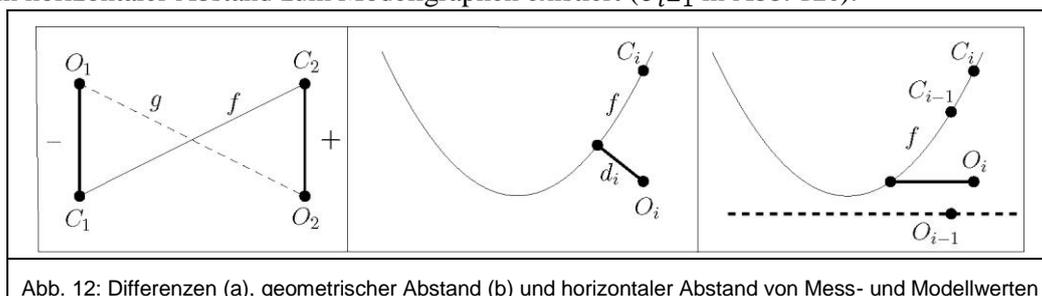


Es lassen sich charakteristische Unterschiede feststellen: In der linken Anpassung „berührt“ der Modellgraph alle Messpunkte bis auf den Messpunkt der KW 1. Dieser ist augenscheinlich recht weit vom Graphen entfernt. Die Anpassung in der Mitte berücksichtigt den Messwert der KW 5 deutlich weniger, trifft dafür aber die anderen anscheinend besser. Die rechte Anpassung trifft die KW 1, 2, 3, 8 und 9 besser als die anderen beiden, verfehlt aber die Werte der KW 4, 5, 6 und 7 recht deutlich.

An dieser Stelle bietet es sich an die gefundenen Parameter in einen Wettstreit um die beste Anpassung treten zu lassen: Ausgehend vom optischen Eindruck soll sich die Lernendengruppe für einen der bestimmten Parametersätze entscheiden. Dies weckt den Wunsch nach der Messbarkeit der bei der Anpassung entstandenen Abweichungen.

2.5 Objektivierung des Fehlers – Fehlerfunktionale

Es ist sehr naheliegend für jeden Messwert eine Abweichung zur angenommenen Modellfunktion zu berechnen und diese anschließend über alle Messwerte aufzusummieren. Nach unserer Erfahrung wird hier zunächst die Differenz zwischen Messwert O_i und Modellwert C_i genannt und auch sofort als unzureichend erkannt – Differenzen mit unterschiedlichen Vorzeichen kompensieren sich, siehe Abb. 12a – und sinngemäß zur Summe der Beträge, dem betragsmäßigen Fehler $BF = \sum_{i=0}^8 |O_i - C_i|$, korrigiert. Die Notation (oder eine andere angemessene) muss wohl in der Regel von der Lehrkraft eingeführt werden. Nach unseren Erfahrungen wird häufig auch ein geometrischer Abstand zwischen Messpunkt und Modellgraph genannt, siehe Abb. 12b. Dieser Ansatz könnte weiter verfolgt werden, wenn größere Fehler in der Zeitmessung erwartet werden. Geht man jedoch davon aus, dass die Zeitmessung keinen eigenen Fehler produziert, wird es schnell klar, dass lediglich der Abstand der berechneten und beobachteten Fallzahlen eingehen sollte. Es könnte auch noch der Vorschlag aufkommen, horizontale Abstände zu betrachten, Abb. 10c. Das würde bedeuten, dass man alle Fehler in der Zeitmessung und keinen Fehler in Fallzahlmessung erwarten würde. Das erscheint im Kontext der epidemiologischen Zahlen nicht sinnvoll. Zudem kann es unter Umständen zu dem Problem führen, dass für einzelne Messpunkte gar kein horizontaler Abstand zum Modellgraphen existiert (O_{i-1} in Abb. 12c).



Die in den Anwendungen am häufigsten genutzten Fehlerquadrate werden nach unseren Erfahrungen von den Lernenden eher nicht genannt, es erscheint aus Lernendensicht auch nicht besonders naheliegend (das Problem unterschiedlicher Vorzeichen wird ja auch bereits von den Beträgen ausgeräumt).

Die Fehlerquadrate müssen also in der Regel von der Lehrkraft eingeführt werden, am einfachsten wohl mit der vorläufigen Begründung, dass es sich hierbei um das gängige wissenschaftliche Verfahren handelt: Die Summe der quadratischen Fehler wird definiert durch $QF = \sum_{i=1}^n (O_i - C_i)^2$. An dieser Stelle empfiehlt es sich die unterschiedliche Gewichtung von kleinen und großen Fehlern zwischen den Beträgen und den Quadraten zu thematisieren: Die Quadrate gewichten große Fehler sehr viel stärker, siehe Abb. 13: Ein doppelt so großer Fehler erzeugt in der Summe der Fehlerquadrate einen viermal so großen Summanden.

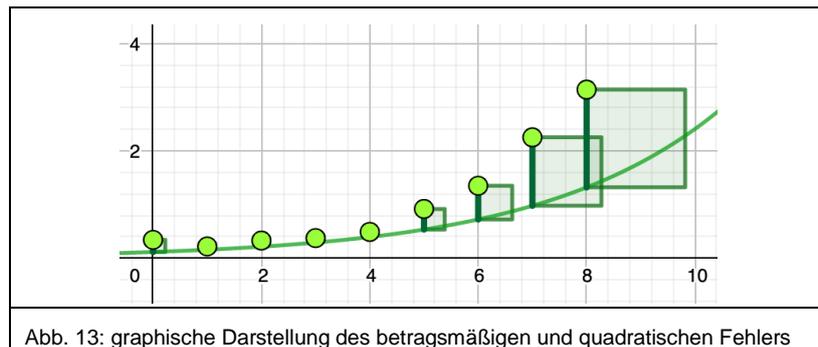


Abb. 13: graphische Darstellung des betragsmäßigen und quadratischen Fehlers

Sind nun verschiedene Fehlerfunktionale eingeführt, mindestens die beiden BF und QF , lassen sich nun die gefundenen Anpassungen miteinander aufgrund der Größe der beiden Fehlerfunktionale nach objektivierte Kriterien miteinander vergleichen. Spannend wird es dabei, wenn der Sieger von der Wahl des Fehlerfunktionals abhängt – dann wird die Frage nach der Wahl des Fehlerfunktionals unausweichlich.

2.6 Exponentielle Regression

Exponentielle Modelle – $f(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$ – haben die Eigenschaft, dass sie sich durch Logarithmieren linearisieren lassen: $\ln(f(t)) = \ln(c) + k \cdot t$. Trägt man die Messpunkte in logarithmischer Auftragung auf, sollten sie also annähernd auf einer Geraden liegen und die Ausgleichsgerade ein gutes Modell liefern, siehe Abb. 14.

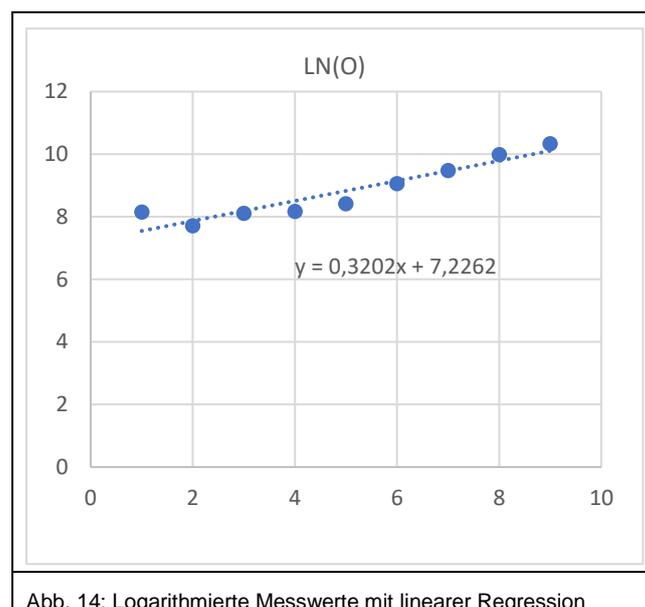


Abb. 14: Logarithmierte Messwerte mit linearer Regression

In der linearen Regression – also der Anpassung der Parameter einer linearen Funktion $l(t) = m \cdot t + n$ an gegebene Daten – werden die Parameter nun wieder mit der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt. In diesem Fall gibt es eine geschlossene Formel für die optimalen Parameter.

In der exponentiellen Regression werden aus den logarithmierten Messwerten $\ln(O_i)$ durch lineare Regression die Parameter k und $\ln(c)$ bestimmt. Es wird also das Fehlerfunktional $LQF = \sum_{i=1}^9 (\ln(O_i) - \ln(C_i))^2$ minimiert. Per Knopfdruck erhält man mit geeigneter Software aus den gegebenen Werten in Tab. 2b die Parameter $c = 1374$ und $k = 0.3202$ (es gilt. In Abb. 15 ist der resultierende Graph im Vergleich mit der laut dem QF besten per Augenmaß von den Lernenden gefundenen Anpassung geplottet, $c = 755.5$, $k = 0.4132$ Es ist deutlich erkennbar, dass die Anpassung exponentieller Regression insbesondere die großen Werte massiv unterschätzt, was natürlich am Logarithmieren liegt.

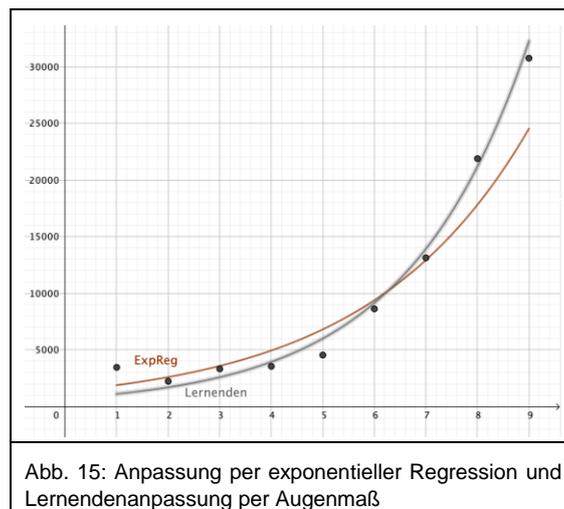
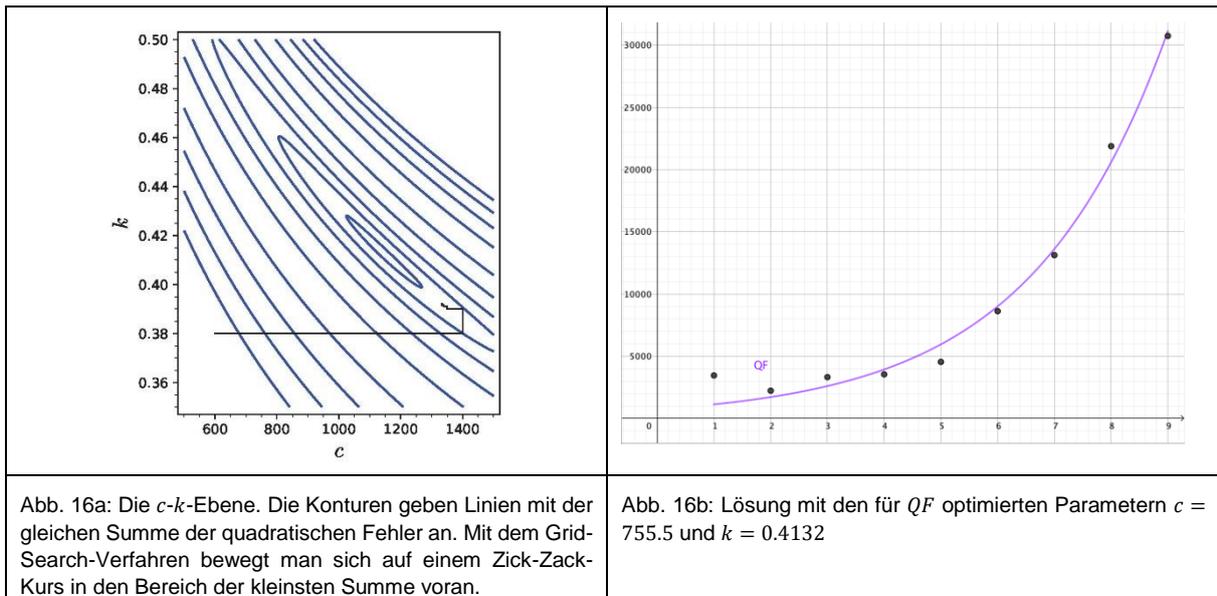


Abb. 15: Anpassung per exponentieller Regression und Lernendenanpassung per Augenmaß

Warum ist also die exponentielle Regression, wie sie z.B. Excel zur Erstellung der „exponentiellen Trendlinie“ verwendet, so beliebt, wenn sie doch zumindest in Einzelfällen so augenscheinlich schlechte Schätzungen liefert?

2.7 Optimale Parameter – numerische Verfahren

Ein Vorteil der exponentiellen Regression liegt darin, dass die Parameter mit Hilfe einer geschlossenen Formel direkt aus den Messwerten berechnet werden können. Das ist bei den anderen Fehlerfunktionalen nicht der Fall und es stellt sich die Frage, wie optimale Parameter (bezüglich des benutzten Fehlerfunktionals) denn dann gefunden werden können. Damit betritt man ein wichtiges und großes Feld der numerischen Mathematik, die Optimierungsprobleme. Eine naheliegende Idee für einen sehr einfachen numerischen Algorithmus, dem sogenannten Grid-Search, sieht folgendermaßen aus: Man hält einen Parameter fest und minimiert das Fehlerfunktional im zweiten Parameter indem man mit einer bestimmten Schrittweite nach links oder rechts geht, je nachdem in welcher Richtung sich das Fehlerfunktional verkleinert. Hat man ein lokales Minimum gefunden – bei der gewählten Schrittweite wird das Fehlerfunktional in beiden Richtungen größer –, hält man diesen Parameter fest und variiert den ersten auf dieselbe Weise. Dieses Verfahren wird iteriert und dabei die Schrittweite immer weiter verkleinert, siehe Abb. 16a.



Auf diese Art lassen sich die nach Augenschein bestimmten Parameter in einem Excel-Sheet immer weiter verbessern, bis man keine Lust mehr hat oder die Änderungen im Fehlerfunktional hinreichend marginal sind. Dieses Verfahren verfolgt eine sehr einfache Idee und eignet sich von daher besonders um mit Schüler*innen die Grundidee eines numerischen Optimierungsverfahren zu besprechen. In der Durchführung ist es jedoch nicht sonderlich effizient: man benötigt zu viele Rechen- und Vergleichsschritte, um in die Nähe eines Minimums zu gelangen. Die Numerik beschäftigt sich deshalb für Probleme solcher Art bessere Algorithmen zu finden.

Möchte man für den schulischen Gebrauch Fehlerfunktionale numerisch minimieren lassen, bietet sich dafür das Excel-Add in „Solver“ an, mit dem das auf wiederum durch Knopfdruck erledigt werden kann. Unserer Meinung nach unterscheidet sich dieser Knopfdruck aber qualitativ von den schulbuchmäßigen Knopfdrücken, weil im Vorfeld ein zumindest bei nicht zu komplexen Problemen effektives, wenn auch nicht effizientes Verfahren entwickelt und durchgeführt wurde.

2.8 Behandlung von „Ausreißern“

Wir optimieren die Parameter nach dem quadratischen Fehlerfunktional QF und erhalten die optimalen Parameter $c = 755.5$ und $k = 0.4132$. Nach dem Plot, Abb. 14 rechts werden insbesondere der erste der fünfte und der achte Wert besonders schlecht getroffen. In Tab. 3 sind die Fehlerquadrate der einzelnen Messwerte bei Nutzung der optimierten Parameter angegeben. Hier steuert der erste Messwert über die Hälfte zur Summe der Fehlerquadrate bei. Dadurch stellt sich die Frage, ob man diesen Wert vielleicht ignorieren sollte. Es könnte ja sein, dass bei der Messung etwas schiefgegangen ist und man näher an die „richtigen“ Parameter kommt, wenn man ihn einfach streicht. Gauß schreibt dazu, dass in jedem Fall alle Werte berücksichtigt werden müssen und keiner ignoriert werden dürfe. Er ging dabei aber auch davon aus, dass alle Werte mit einer vergleichbaren Genauigkeit gemessen worden sind. Könnte es nicht sein, dass bei diesem Wert wirklich etwas falsch gelaufen ist?

Die Frage ist also: Wie plausibel ist dieser Wert oder anders formuliert, wie oft müssen wir eigentlich mit „Ausreißern“ dieser Art rechnen, wenn bei der Messung alles vernünftig läuft? Wenn wir das quantifizieren könnten, könnte man analog zu Hypothesentests vorgehen und beschließen, dass man so einen Wert rausschmeißt, wenn man solche oder noch größere Fehler z.B. nur in 5% aller derartig konzipierten Untersuchungen erwarten müsste. Wir wollen einmal schauen, wie weit uns das Schulwissen in dieser Frage bringen kann.

Exponentielle Modelle sind für den bestimmte Phasen von Epidemien theoretisch sehr gut begründete Modelle, so dass wir davon ausgehen, dass die Abweichung zwischen Modellwert und gemessenen Wert im Wesentlichen auf Messfehler und nicht auf die Unangemessenheit des exponentiellen Modells zurückzuführen ist. Wir akzeptieren also erst einmal das exponentielle Modell mit den optimierten Parametern $c = 755.5$ und $k = 0.4132$. Aus der Beschreibenden Statistik ist bekannt, wie man die Varianz und Standardabweichung von n Daten y_1, \dots, y_n bei der Mittelwertbestimmung schätzen kann, nämlich

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

wobei $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ das arithmetische Mittel der Messwerte ist. Dass man bei der Schätzung der Varianz lediglich durch $n - 1$ teilt, lässt sich damit begründen, dass die n Messwerte nicht mehr unabhängig voneinander sind, sondern den Mittelwert \bar{y} ergeben müssen. Kennt man $n - 1$ Messwerte, lässt sich der n -te mit dem Mittelwert berechnen. Die Messwerte haben also nur noch $n - 1$ „Freiheitsgrade“.

Wie sieht die Situation in unserem Beispiel aus? Aus neun Messwerten sind bereits zwei Parameter bestimmt worden, es liegen also nur noch sieben Freiheitsgrade vor. Wir haben nicht mehr einen Mittelwert, sondern für jeden Messwert O_i einen eigenen „Mittelwertersatz“, nämlich den mit den optimalen Parametern bestimmten Modellwert $C_i = ce^{k \cdot i}$ mit $c = 755.5$ und $k = 0.4132$. Wir erhalten als Schätzung für die Standardabweichung also

$s^2 = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^9 (O_i - ce^{k \cdot i})^2 = \frac{1}{7} \cdot QF$, wobei hier die Parameter fixiert sind. Mit unseren Messwerten ergibt sich damit als Schätzung der Standardabweichung $s = 1.225.9$. Damit können wir jetzt berechnen, wie viele Standardabweichungen die einzelnen Messwerte beitragen, diese Zahl findet sich in der dritten Spalte von Tab. 3. Dazu berechnen wir jeweils den Quotienten $\frac{|O_i - C_i|}{s}$ (für die Berechnung von C_i werden natürlich wieder die optimierten Parameter genutzt). Für den ersten Messwert ergeben sich 1.893 Standardabweichungen.

Tab. 4: Fehler und Standardabweichungen

KW	Quadratischer Fehler	Fehler in Standardabweichungen
01	5 386 581	1.893
02	259 551	0.416
03	517 077	0.587
04	153 519	0.320
05	1 991 331	1.151
06	148 414	0.314
07	244 173	0.403
08	1 673 912	1.055
09	145 814	0.311
Fehlersumme	10 520 370	

Ist das nun soviel, dass man sagen kann, unter regulären Bedingungen kommt so etwas so selten vor, dass wir lieber davon ausgehen, dass keine regulären Bedingungen bei der Messung vorlagen?

Um das numerisch fassbar zu machen, benötigen wir ein Fehlermodell. Das einzige, das dazu schulisch in Frage kommt, ist das des normalverteilten Fehlers. Wir gehen also davon aus, dass die Messungen der i -ten Kalenderwoche eine normalverteilte Zufallsgröße mit Erwartungswert C_i und Standardabweichung s ist. Die Realisierung O_i hat eine Abweichung von 1.893 Standardabweichungen. Bei einer einzigen Messung erwarten wir Werte mit Standardabweichung größer gleich 1.893 mit einer

Wahrscheinlichkeit $1 - 0.9416 = 0.0534$, also in gut 5% der Fälle. Wir müssen aber auch berücksichtigen, dass wir neun Messungen gemacht haben. Die richtige Frage ist also: Wie wahrscheinlich ist es, bei neun Messungen normalverteilter Zufallsgrößen einen Messwert dabei zu haben, dessen Abweichung vom theoretischen Wert größer oder gleich 1.893 Standardabweichungen ist. Über das Gegenereignis erhalten wir dafür die Wahrscheinlichkeit $1 - 0.9416^9 = 0.4182$.

Auf lange Sicht muss man bei solchen Messungen also in gut 40% der Fälle mit so einem Ereignis rechnen. Es muss also durchaus mit solchen Ausreißern gerechnet werden.

In diese Berechnung sind viele Annahmen eingeflossen, die kritisch reflektiert werden können. Besonders fragwürdig ist die Annahme, dass alle Messungen dieselbe Standardabweichung s haben sollen. Es wäre auch plausibel, dass diese mit der Größe der Messwerte wächst: Wenn die Fallzahlen groß sind, sind auch die Fehler groß, bei kleinen Fallzahlen sollten auch die Fehler klein sein. Das wollen wir aber hier nicht weiter verfolgen.

Abschließend sei erwähnt, dass der erste Messwert tatsächlich mit einer etwas anderen Methode eruiert wurde und dadurch das Abweichen von den anderen Werten erklärt werden kann (für Details siehe Bauer, Doktor und Donner, 2022). Somit könnten inhaltliche Abwägungen in diesem konkreten Fall sehr wohl zu dem Schluss führen, diesen Messwert aus der Datenmenge zu entfernen.

2.9 Ausblick – Welches Fehlerfunktional soll es denn nun sein?

In dem betrachteten Beispiel ergibt sich keine bedeutende Unterscheidung, ob die Parameter die Summe der Quadrate oder die Summe der Abstände minimiert: Wird die Summe der Abstände minimiert ergeben sich die Parameter $c = 1038$ und $k = 0.4236$. Die beiden zugehörigen Graphen würden sich in der hier gewählten Skalierung optisch nicht unterscheiden lassen. Aus praktischer Sicht gibt es also keinen eindeutigen Grund eines der beiden Funktionale vor dem anderen zu bevorzugen. In der Literatur liest man hin und wieder, dass das quadratische Fehlerfunktional bevorzugt würde, weil sich damit (im Fall der linearen Regression) leichter explizite Formeln für die optimalen Parameter bestimmen ließen. Das ist kein sonderlich überzeugender Grund. Die tiefere Begründung liegt darin, dass die kleinste Summe der Quadrate in vielen Situationen der Maximum-Likelihood-Schätzer und im Fall linearer Modell unter relativ schwachen Voraussetzungen an die Messfehler der beste erwartungstreue Schätzer für die Parameter ist (Satz von Gauß-Markov). Insbesondere der Weg die Methode der kleinsten Quadrate als Optimierer der Likelihood-Funktion im Fall normalverteilter Messfehler herzuleiten, erscheint uns ein prinzipiell in der Oberstufe gangbarer Weg zu sein. Unterrichtsvorschläge und -versuche dazu gibt es nach unserem Kenntnisstand allerdings noch nicht.

3. Fazit

In diesem Beitrag haben wir anhand des Beispiels von Fallzahlen von SARS-CoV-2 dargelegt, wie das Zusammenspiel von Daten und Modellen im Mathematikunterricht mit Schüler*innen thematisiert werden könnte. Dabei sollten Messdaten im Mathematikunterricht „ernst“ genommen werden, was unserer Meinung nach weder bei der Aufgabenstellung der Bierschaumaufgabe noch im deutschen Schulbuchauszug der Oberstufe der Fall ist. Die dort zu entnehmende Vorgangsweise, passende Punkte zur Bestimmung der Modellfunktion vorzunehmen oder Datenpunkte gegebenenfalls zu ändern, falls die Modellierung der Datenmenge als nicht gut beurteilt wird, suggeriert, dass man eine gute Modellfunktion dadurch erhalten kann, indem nur die Punkte passend gewählt sind. Bei Schulbuchaufgaben kann diese Strategie durchaus erfolgreich sein, wenn die Daten vorab „schön“ genug sind, in der Realität scheitert diese Vorgangsweise im Allgemeinen jedoch, wie sowohl die Ausführungen von Gauß bei der Bestimmung der Planetenbahn als auch die Modellierung der Fallzahlen von SARS-CoV-2 zeigen.

Grundsätzlich ist die Idee des Schätzens von Parametern mithilfe eines geeigneten Fehlerfunctionals sicherlich von jeder Lerngruppe in der Oberstufe nachvollziehbar. Unsere Erfahrungen mit Lernenden zeigt, dass die Schüler*innen sehr daran interessiert sind und vielseitige Vorschläge einbringen, um die anfänglich errechneten Modelle besser an die Daten anzupassen. Inwieweit die von den Lernenden vorgeschlagenen Fehlerfunctionale alle auf „Tauglichkeit“ hin überprüft werden, und ob neben dem Betragsfehler und dem quadratischen Fehler auch der Unterschied von letzterem zur exponentiellen Regression aufgezeigt wird, kann man von der konkreten Lerngruppe und Situation abhängig machen. Auch die Tatsache, dass die Antwort nach der optimalen Schätzung der Parameter von der Wahl des Fehlerfunctionals abhängt, bietet einen Anlass zum Reflektieren über die Mathematik, die bei Funktionsanpassungen im Unterricht üblicherweise immer eindeutige Antworten liefert. Darüber hinaus bietet die Auseinandersetzung mit der Behandlung von möglichen Ausreißern eine gute Gelegenheit Analysis und Stochastik zu vernetzen, mit dem Ziel, die Qualität von Daten (seriös) einschätzen zu können und dabei auch über die Güte von Messwerten zu reflektieren.

Wir sehen diesen Beitrag nicht zuletzt auch als einen Denkanstoß, um aufzuzeigen, zu welchen reichhaltigen Auseinandersetzungen und innermathematischen Vernetzungen ein einzelner, ernstgenommener Datensatz führen kann.

Literatur

- Bauer, S., Doktor, J. & Donner, L. (2022): Daten, Modelle und Prognosen – das verborgene Vordringen einer Virusvariante. In: M. Besser et al.: ISTRON-Schriftenreihe: Mathematisches Modellieren in der Praxis: Lernumgebungen für einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht in den Sekundarstufen. Aufgabenbeispiele, fachliche und fachdidaktische Fundierungen, methodische Überlegungen, Beschreibung von Schülerlösungsprozessen. (accepted)
- Baum, M. et al. (2000): *Lambacher-Schweizer Mathematik Oberstufe für Gymnasien Nordrhein-Westfalen*. 1. Aufl. Stuttgart: Ernst Klett Verlag
- Baum, M. et al. (2014a): *Lambacher-Schweizer 7 Mathematik für Gymnasien Hessen*. 1. Aufl. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.
- Baum, M. et al. (2014b): *Lambacher-Schweizer 8 Mathematik für Gymnasien Hessen*. 1. Aufl. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.
- Baum, M. et al. (2016): *Lambacher-Schweizer Mathematik Oberstufe mit CAS-Einsatz für Gymnasien Nordrhein-Westfalen*. 1. Aufl. Stuttgart: Ernst Klett Verlag
- Jahnke, T. & Wuttke, H. (2006). *Mathematik Stochastik*. 1. Aufl. 2. Druck. Berlin: Cornelsen Verlag
- Malle, G., Koth, M., Woschitz H., Malle, S., Salzger B. & Ulovec, A. (2010): *Mathematik verstehen 6*. 1. Aufl. Wien: öbv.
- Wikipedia (2022): (1) Ceres. Online: [https://de.wikipedia.org/wiki/\(1\)_Ceres](https://de.wikipedia.org/wiki/(1)_Ceres)

Verfasser

Lukas Donner
Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Thea-Leymann-Straße 9
D-45127 Essen
lukas.donner@uni-due.de

Sebastian Bauer
Georg-August-Universität Göttingen
Institut für Mathematik
Bunsenstraße 3-5
D-37073 Göttingen
sebastian.bauer@uni-goettingen.de